Trabajo Fin de Máster

Propuesta de introducción a las ecuaciones de primer grado en 1º de E.S.O

Proposal for the introduction of first degree equations in 1º E.S.O

Autora

Tania Cambero Jiménez

Director

Pablo Beltrán Pellicer

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020

Índice

A) Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático a enseñar son las ecuaciones de primer grado.

El álgebra es un nuevo lenguaje matemático que se introduce en la asignatura de matemáticas de 1º de ESO que consiste en la combinación de letras, números y signos para hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas vistas con anterioridad.

Para la comprensión del álgebra, se necesita desarrollar un buen razonamiento algebraico, el cual implica representar y generalizar patrones en cualquier aspecto de las matemáticas mediante el uso del lenguaje algebraico. El razonamiento algebraico implica también el desarrollar un pensamiento relacional (saber relacionar términos de una expresión, así como expresiones entre sí), transformar expresiones algebraicas sin centrarse en el cálculo de una solución concreta… (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014)

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que presentan un miembro a cada lado del operador igual. En cada uno de ambos miembros hay uno o varios términos compuestos por números y letras. En las ecuaciones se establecen relaciones entre valores conocidos (números) y valores desconocidos (incógnitas).

Cada una de las expresiones algebraicas que se encuentran a cada lado de la igualdad se denominan miembros y cada uno de los sumandos que forman dichos miembros se conocen como términos de la ecuación.

Hallar la solución de una ecuación consiste en obtener los valores correspondientes a las incógnitas (las letras) para que se cumpla la igualdad. Cada término, o cada monomio que compone la ecuación, presenta un grado característico, el grado de la ecuación será el mayor de los grados de los monomios tras haber reducido la ecuación agrupando aquellos términos con misma parte literal.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

Podemos situar el objeto matemático a enseñar en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, en la asignatura de matemáticas. Los contenidos a tratar en dicho curso según la Orden ECD/489/2016, Aragón, 26 de mayo, son:

Bloque 2. Números y Álgebra

Contenidos 1º ESO:

- Números negativos.
- Significado y utilización en contextos reales.
- Números enteros.
- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

A pesar de que los números negativos no entran dentro del objeto matemático a tratar, el conocimiento de estos es necesario para asegurar la completa comprensión de las ecuaciones de primer grado. De hecho, la negatividad matemática nace tras la aparición del cálculo algebraico, y como consecuencia de la necesidad de manipular expresiones con letras. Es a partir de entonces cuando se comienza a operar términos que a su vez son operaciones indicadas. Mientras que en aritmética los signos "+" y "-"indican operaciones binarias entre números sin signos, en álgebra dichos signos tienen múltiples significados (operaciones binarias entre números con signo, indican si un número es positivo o negativo…) (Cid, 2016)

Criterios de evaluación:

Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales

Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.

Crit.MA.2.7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los problemas asociados al objeto matemático a enseñar se han clasificado según su dificultad (teniendo en cuenta la forma en la que se presentan las ecuaciones de primer grado que utilizamos para la resolución de estos). Los alumnos realizarán problemas sencillos sobre traducción a lenguaje algebraico con el fin de familiarizarse con este nuevo lenguaje para posteriormente comenzar con problemas de diferentes temáticas que se irán introduciendo de forma gradual según su dificultad.

Se pretenden enseñar una serie de técnicas asociadas al objeto matemático a partir de las cuales se puede resolver el campo de problemas. Estas técnicas se implementarán en clase con las tecnologías correspondientes encargadas de justificarlas para que se comprenda el objeto matemático en su totalidad.

Entre las técnicas a enseñar tenemos la traducción a lenguaje algebraico (uso de las letras o incógnitas, del signo igual...), la obtención del valor numérico de expresiones algebraicas, así como la simplificación de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones de primer grado. Las tecnologías que van a justificar dichas técnicas son entre otras la agrupación de términos semejantes para la simplificación de expresiones algebraicas, el orden o jerarquía de las operaciones... Las tecnologías que usaremos para la justificación de la resolución de las ecuaciones de primer grado son las siguientes definiciones: “Al sumar, restar, multiplicar y dividir por lo mismo a ambos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente” y “Dos ecuaciones equivalentes poseen la misma solución”.

B) Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

A la hora de impartir clase y de proceder con la explicación del temario, los profesores utilizan tanto el currículo donde se especifican los objetos matemáticos a tratar y el orden de los mismos, como el libro de texto correspondiente que sirve como guía y modelo para conocer cómo se está siguiendo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para analizar la introducción escolar del objeto matemático a tratar, se ha analizado el libro de 1º de ESO de la editorial Anaya y varias páginas web.

A partir de esta revisión, y tras indagar en varios documentos que analizan la forma en la que se introduce el álgebra en el ámbito escolar, se puede concluir que habitualmente la introducción del álgebra en el aula se realiza mediante una interpretación de esta como una aritmética generalizada, es decir, se produce una aritmetización escolar del álgebra. Este proceso consiste en la identificación del álgebra elemental con el "simbolismo algebraico" (o lenguaje algebraico), en contraposición a, pero también como desarrollo de, un supuesto "lenguaje aritmético". Algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra son (Ruiz-Muñoz, Bosch & Gascón, 2015):

a) El álgebra escolar se construye en un contexto exclusivamente numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción de expresiones numérico-verbales. Se la considera como un mero epifenómeno de la aritmética
b) Se considera, de manera simplista, que las expresiones algebraicas surgen ante la necesidad de representar y manipular números desconocidos, se supone que ésta es su razón de ser.
c) Las tareas específicamente "algebraicas" se reducen a la manipulación formal de expresiones algebraicas con letras y números (lo que se suele denominar "cálculo algebraico") y a la resolución de ecuaciones.
d) En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, la aritmética generalizada hace una distinción absoluta entre los datos conocidos (valores numéricos) por un lado y las incógnitas por otro.
e) Una ecuación se interpreta como una igualdad numérica que se cumple para algunos valores concretos de las incógnitas.

Los libros de texto también dejan clara la justificación instrumental de la introducción escolar de este objeto matemático puesto que es una de las herramientas más utilizadas para la resolución de ciertos problemas que no somos capaces de resolver a partir de la aritmética. Es decir, en los libros de texto la razón de ser de este objeto matemático se basa en la resolución de problemas.

Además, dentro del álgebra podemos incluir el estudio de relaciones entre variables, es decir, de funciones y gráficos (Molina, 2015). Las letras, en este caso, representan variables. En el estudio de funciones se utiliza simbolismo algebraico.

Otra de las visiones del álgebra es la representación de ideas matemáticas. El álgebra es una parte del lenguaje matemático formado por letras y símbolos.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Se han analizado tanto libros de texto, como páginas webs para averiguar cuáles son los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente.

Con respecto a los campos de problemas, los temas principales que se abordan en ellos son entre otros:

- Traducción a lenguaje algebraico, donde se incluyen problemas de traducción a lenguaje algebraico a partir de enunciados y viceversa.
- Problemas de operador aditivo, donde las ecuaciones que se obtienen son de la forma $x + a = b$.
- Problemas de operador combinado, donde las ecuaciones que se obtienen tienen tanto operador aditivo como operador multiplicativo ($ax + b = c$).
- Problemas de operador combinado a ambos lados de la igualdad, son de la forma $ax + b = cx + d$.
- Problemas de operador combinado con paréntesis, donde aparecen ecuaciones con paréntesis.
- Problemas de operador combinado con denominadores, donde las ecuaciones que se obtienen presentan algún denominador.

Las técnicas que se explican son:

- Traducción a lenguaje algebraico de enunciados, de secuencias de números....
- Valor numérico de expresiones algebraicas.
- Uso de expresiones algebraicas, trabajar con operaciones entre monomios, operaciones entre términos semejantes...
- Diferencia entre igualdades y ecuaciones.
- Resolución de ecuaciones de primer grado donde los pasos a seguir que se proponen son:
  1. Quitar los paréntesis que se encuentran en la ecuación.
  2. Trasponer aquellos términos que son semejantes.
  3. Reducir (operando) dichos términos semejantes.
  4. Despejar la incógnita.

5. Comprobar la solución obtenida.

- Resolución de problemas donde los procedimientos a seguir son (Colera & Gaztelu, 2009):
    1. Comprensión del problema (identificando datos, incógnitas y la relación entre ellos).
    2. Planteamiento de la ecuación que permite resolver el problema.
    3. Resolver dicha ecuación.
    4. Comprobar los resultados obtenidos.

Y, por último, las tecnologías que justifican dichas técnicas son la definición de monomios semejantes, así como las de ecuación e identidad. La definición de ecuación equivalente, así como la regla de la suma y del producto también son tecnologías que van a justificar las técnicas nombradas anteriormente.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Los estudiantes tienen su primer contacto con el álgebra durante el primer curso de educación secundaria obligatoria pues hasta entonces las matemáticas que estos han estudiado han sido meramente aritméticas. El álgebra constituye un nuevo lenguaje matemático mucho más abstracto, donde por primera vez, las incógnitas se representan mediante letras lo que puede ocasionar grandes dificultades de comprensión en los alumnos.

Es muy importante que los estudiantes entiendan este nuevo objeto matemático en su totalidad, que razonen y que sean ellos mismos los que encuentren la lógica en las tecnologías que justifican las técnicas nombradas anteriormente para que no lo vean como una serie de pautas mecanizadas a seguir y que por ende no razonen sobre ello y se dediquen a imitar lo enseñado sin comprenderlo realmente.

Tal y como se ha explicado anteriormente, en el sistema educativo española se interpreta el álgebra como una aritmética generalizada, lo que reduce dicho objeto a la manipulación formal de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y a la resolución de ciertos prototipos de problemas. Para evitar este encasillamiento, y lograr que los alumnos comprendan plenamente este objeto matemático, lo ideal sería la introducción del álgebra en la educación secundaria como un instrumento de modelización y no como una mera aritmetización generalizada (Ruiz-Muñoz, Bosch & Gascón, 2015).

C) Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

El álgebra es un lenguaje matemático que se introduce por primera vez durante el primer curso de la etapa de educación secundaria obligatoria, es por ello que los alumnos no disponen de conocimientos previos sobre álgebra, sobre tomar letras como incógnitas... Así pues, la introducción a este nuevo lenguaje se dará por primera vez en el tema correspondiente del curso de 1º de ESO.

Tal y como se ha afirmado anteriormente, el álgebra tiene múltiples visiones y concepciones, sin embargo, en el sistema educativo español se hace especial hincapié en el álgebra como generalización de la aritmética, por lo que es imprescindible que los alumnos dispongan de una buena base aritmética para que les resulte más sencilla la comprensión de este nuevo objeto matemático.

Entre los conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático están las operaciones aritméticas básicas y las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y el producto y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Además de los conocimientos aritméticos, y para que los alumnos sean capaces de solucionar problemas con temática de carácter geométrico, es importante que los alumnos conozcan aspectos geométricos básicos como son el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Los conocimientos previos que los alumnos de 1º de ESO deberían poseer gracias a enseñanzas anteriores previas a comenzar con la introducción al álgebra deben haber sido adquiridos durante la etapa de Primaria. El currículo de Educación Primaria de Aragón (ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio) recoge los siguientes conocimientos que se deberían haber tratado en 6º de Primaria:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

Contenidos:

- Planificación del proceso de resolución de problemas: Análisis y comprensión del enunciado, Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc. Resultados obtenidos.
- Acercamiento al método de trabajo científico mediante el estudio de algunas de sus características y su práctica en situaciones sencillas. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Criterios de evaluación:

Crit.MAT.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas

Crit.MAT.1.7. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas

Crit.MAT.1.8. Conocer algunas características del método de trabajo científico en contextos de situaciones problemáticas a resolver.

Crit.MAT.1.9./Crit.MAT.1.11 Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático: precisión, rigor, perseverancia, reflexión, automotivación y aprecio por la corrección. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

Bloque 2: Números.

Contenidos:

- Números positivos y negativos.
- Fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador.
- Operaciones con fracciones.
- Operaciones con números naturales
- Operaciones con fracciones.
- Algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división.

Criterios de evaluación:

Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.

Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando el más adecuado.

Crt.MAT.2.8. Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Durante la primera sesión de la unidad didáctica correspondiente al objeto matemático que se quiere enseñar, se realizará una evaluación inicial sobre los conocimientos previos que los alumnos tienen sobre aritmética. Esta evaluación se realizará mediante una encuesta diseñada con SurveyMonkey, una herramienta tecnológica a partir de la cual se pueden diseñar encuestas y test para realizar online. A partir de esta prueba podremos observar si los alumnos han adquirido los conocimientos previos necesarios para comenzar con la introducción al álgebra y cuales son aquellos conceptos que les generan más dudas para incidir en ellos realizando las explicaciones pertinentes.

Tras obtener los resultados de esta evaluación inicial, se deberá prestar especial atención en aquellos conceptos que generan más dudas a los alumnos mediante actividades de repaso que afiancen los conocimientos de los alumnos y que les ayuden a interiorizar los conceptos clave sobre aritmética para poder comenzar con el objeto matemático que se pretende enseñar.

D) Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser que voy a tener en cuenta a la hora de introducir este objeto matemático es el álgebra como instrumento de modelización. Como se ha expuesto anteriormente, el sistema educativo español se centra en una aritmetización generalizada del álgebra como razón de ser de esta, limitándose a la manipulación formal de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y a la resolución de ciertos prototipos de problemas. Por lo que la introducción del álgebra como instrumento de modelización se debe hacer de una forma progresiva, planteando en primer lugar problemas aritméticos, y una vez los alumnos disponen del instrumento algebraico, pasar por un proceso de algebrización y finalizar desarrollando el álgebra como instrumento de modelización.

Este proceso de algebrización consta de tres etapas. Tras introducir un problema aritmético y escribir el programa de cálculos aritméticos (PCA) que consiste en la secuenciación de las operaciones en forma retórica, la primera de las etapas llegará con la introducción de problemas que requieren la manipulación de PCA, donde tanto los datos como las incógnitas son relaciones por lo que no es posible una resolución aritmética. En esta primera etapa se plantean problemas donde la incógnita aparece únicamente en uno de los miembros. En la segunda etapa de algebrización se introducen problemas donde se igualan dos PCA con los mismos argumentos no numéricos. Finalmente, en la tercera y última de estas etapas se introducirán problemas donde no se limita el número de variables ni se hace ningún tipo de distinción entre incógnita y parámetro. (Ruiz-Muñoz, Bosch & Gascón, 2015).

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

El álgebra, y en concreto las ecuaciones de primer grado aparecieron en la historia como un método de resolución de problemas de la vida cotidiana.

En los papiros (manuscritos) que se conservan del antiguo Egipto podemos encontrar una multitud de problemas matemáticos resueltos (la gran mayoría de carácter aritmético) entre los cuales se pueden encontrar un grupo que podríamos clasificar como algebraicos. En estos, los egipcios obtenían la solución realizando operaciones de forma similar a como hoy resolvemos las ecuaciones. Las más utilizadas por los egipcios eran de la forma $x + ax = b$ y $x + ax + bx = 0$ donde a, b y c eran números conocidos y x la incógnita, la cual denominaban "*aha*".

Por su parte, Diofanto de Alejandría fue un matemático griego, nacido entre los años 200 y 213 d.C, conocido como el padre del álgebra moderna por sus aportes en el desarrollo del cálculo algebraico. Diofanto utilizó letras para representar valores desconocidos y los introdujo en las operaciones.

La palabra "*Álgebra*" proviene del título del libro *Al-jabr w'al-muqabalah* que fue escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi, donde se muestra la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1999)

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Como se ha indicado anteriormente, la razón de ser del objeto matemático elegido es el álgebra como instrumento de modelización, por lo tanto, escogeremos una serie de actividades y problemas para la introducción del álgebra y las ecuaciones en el aula.

Para este primer encuentro de los alumnos con el álgebra, el profesor presentará las letras como incógnitas. En estos tres problemas que se proponen, los alumnos van a tratar de averiguar cuál es la incógnita, es decir, tratarán de hallar el número que es solución del problema.

(1) Balanzas: Se llevará a clase una balanza, pesas de 50g y distintos objetos de los cuales habrá que adivinar su peso equilibrando la balanza con las pesas que se disponen. Ejemplo:

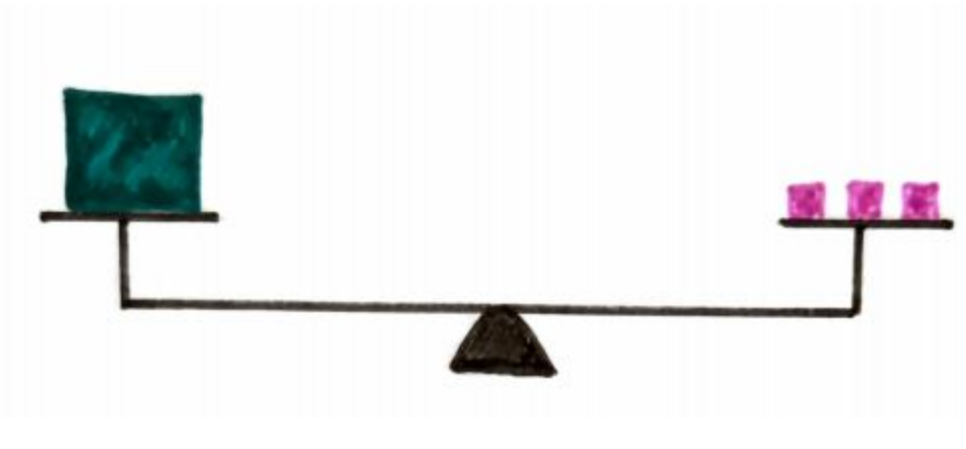

Figura 1. Imagen de la balanza

(2) En una clase de 25 alumnos, repartiremos una tarjeta a cada uno. Dicha tarjeta podrá contener una X o ser completamente blanca. Les propondremos adivinar cuantas tarjetas con X se han repartido a los alumnos. Para ello se les darán dos datos:

   i. El número de tarjetas repartidas coincide con el número de alumnos en clase.
   ii. El número de tarjetas en blanco es igual al número de chicos de clase menos 5 (en clase hay 16 alumnos).

(3) Se quieren pintar de rojo los dos siguientes bordes de la pared rectangular de una habitación:

Figura 2. Pared rectangular

Para ello, queremos averiguar cuantos metros se deben pintar, sabiendo que la base mide 4 metros y que el área de la pared es de 12 m^2.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Nuestro principal objetivo de la sesión inicial de presentación del objeto matemático, es que los alumnos comprendan y entiendan la utilidad del mismo, así como observar nuevas herramientas que les ayudan a resolver problemas de su día a día.

En primer lugar, se les presenta el problema de la balanza, en el cual se pretende equilibrar el peso de ambos lados de esta para que sus dos brazos queden a la misma altura. Los alumnos comprenderán de este modo que pueden hallar los pesos de los objetos de los que no disponen información, es decir, de los cuales no conocen sus pesos, utilizando aquellos de los que sí disponen y tratando de equilibrar la balanza con ellos hasta obtener el valor concreto. Así, los alumnos se harán una idea del concepto de igualdad (lo que entendemos como igualdad en álgebra y no sólo como un mero signo que se utiliza para dar la solución de una operación aritmética).

El siguiente problema consiste en una “adivinanza”, una especie de juego que se presentará a los alumnos para que logren comprender cuál es el número de tarjetas marcadas con X de las que se disponen. Mediante este “reto” los alumnos deben ser capaces de razonar y llegar al resultado sin necesidad específica de utilizar incógnitas, a través del proceso de ensayo-error para posteriormente hacerles comprender que han hecho uso de ellas de forma implícita.

Finalmente, se plantea un problema geométrico puesto que dicho tema no es nuevo para ellos. Por lo que, a partir de conceptos que han utilizado con anterioridad, los alumnos mediante una metodología de ensayo-error llegarán al resultado del problema. Se pretende que comprendan que mediante una ecuación la solución se puede obtener de forma rápida y sencilla.

E) Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

El objetivo principal de los problemas que se proponen al alumnado en clase, es que entiendan la utilidad de las ecuaciones de primer grado y que sepan implementarlas en la vida diaria, es por ello que se propondrán problemas de la vida cotidiana.

Realizaremos una clasificación de los campos de problema en función de la dificultad de estos.

Es decir, según la dificultad de los problemas, o según la ecuación de primer grado que utilizamos para resolverlos, podemos clasificarlos del siguiente modo:

- O1. Operador aditivo ($x + a = b$)
- O2. Operador multiplicativo ($ax = b$)
- O3. Operador combinado ($ax + b = c$)
- O4. Operador combinado a ambos lados de la igualdad ($ax + b = cx + d$)

Donde “a, b, c, d” son números naturales, enteros o racionales.

Además, también podemos añadir a esta clasificación un tipo de problemas que consiste en la traducción de enunciados a lenguaje algebraico y viceversa.

A continuación, se proponen una serie de problemas según la clasificación propuesta anteriormente a partir de los cuales se trabajará la resolución de ecuaciones de primer grado y de problemas matemáticos.

Problemas de traducción a lenguaje algebraico:

(1) Traduce a lenguaje algebraico:
   a) La suma de un número y su consecutivo
   b) La edad de Alba dentro de 8 años
   c) Número de caramelos que tengo si me como 5
   d) El triple del doble de un número
   e) María tiene la mitad de años que su hermano
   f) Rubén tiene el doble de cromos que Julia
   g) El cuadrado de un número menos ocho
   h) Sonia tiene el doble de la edad de Luis más cinco
   i) El triple del número siguiente de un número

(2) Plantea enunciados para las siguientes ecuaciones:
   a) $3x + 2 = 32$
   b) $3x + (x - 1) = 21$
   c) $x/5 = 15$

Problemas de operador aditivo

(1) Si a la suma de un número más ocho le resto 5 obtengo 22. ¿Cuál es el número? (O1)

(2) La madre de Marta tuvo a su hija con 28 años. ¿Cuántos años tiene Marta si su madre tiene actualmente 45 años? (O1)

(3) En un rectángulo sabemos que la base mide 8cm más que la altura. Si la base mide 12cm. ¿Cuánto mide la altura? (O1)

(4) En una clase de 25 alumnos, 9 de ellos llevan gafas. ¿Cuántos alumnos no llevan gafas? (O1)

Problemas de operador multiplicativo

(1) Si a un número le sumamos su cuádruple obtenemos 30. ¿Qué número es? (O2)

(2) Roberto tiene la mitad de la edad de su padre. La suma de ambas edades es 66. ¿Cuántos años tienen padre e hijo? (O2)

(3) En un rectángulo cuyo perímetro es 30cm, ¿Cuánto miden su base y altura si su base mide el doble que su altura? (O2)

(4) Disponemos de la siguiente figura de la cual sabemos que el perímetro del cuadrado es 8cm, el del cuadrado es 14.44cm y el del es 12cm. ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo interior? (O2)

(5) Juan tiene el triple de dinero que Jorge y Arturo el cuádruple. En total tienen 64€. ¿Cuánto dinero tiene cada uno? (O2)

Problemas de operador combinado

(1) La suma de cuatro números enteros consecutivos es 54. Halla el valor de dichos números consecutivos. (O3)

(2) La edad de tres hermanos suma 21. La mayor tiene el doble de años que el mediano, y la pequeña tiene 3 años. ¿Cuántos años tiene cada uno? (O3)

(3) La medida de tres lados de un triángulo son tres números consecutivos. Si el perímetro de este mide 24cm, ¿Cuánto mide cada lado del triángulo? (O3)

(4) En 1ºA juegan al fútbol el doble de alumnos que en 1ºb. En 1ºC juegan 8 alumnos más que en 1ºA. En total juegan 33 alumnos a fútbol entre las tres clases. ¿Cuántos juegan de cada una? (O3)

Problemas de operador combinado a ambos lados de la igualdad

(1) La mitad de un número más 1 es igual a dicho número menos 7. ¿De qué número se trata? (O4)

(2) Carlos tiene el triple de edad que su hermana Isabel. Su primo Santi tiene 8 años más que Isabel, mientras que su prima Elena tiene el doble de años que Isabel. La suma de las edades de Carlos e Isabel es igual a la suma de las edades de sus primos. ¿Cuántos años tiene cada uno? (O4)

(3) Claudia tiene el triple de folios que Ana, y Héctor el séxtuple. Héctor le da 25 folios a cada una. Ahora Claudia tiene el mismo número de folios que Héctor. ¿Cuántos tenían cada uno al principio? ¿Y ahora? (O4)

Cabe destacar que los temas a tratar en los enunciados de los problemas propuestos son:

- Problemas numéricos
- Problemas de edades
- Problemas geométricos

- Problemas cotidianos

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Si bien en los problemas iniciales propuestos para la introducción de la razón de ser del objeto matemático, los alumnos eran capaces de resolverlos a través de la razón y haciendo uso del ensayo-error, en estos problemas los estudiantes deberán desarrollar las técnicas aprendidas y desarrolladas en el apartado siguiente. Además, se presentan diferentes grados de dificultad según la forma que tiene la ecuación de resolución de cada problema, por lo tanto, los alumnos irán aprendiendo a resolverlos de forma gradual, de más sencillo a más complicado.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los problemas propuestos por el profesor han sido divididos por dificultad y será de esta forma como se presentarán al alumno. En primer lugar, y acorde con las técnicas que se explicarán en el apartado F, los alumnos deberán familiarizarse con el lenguaje algebraico y el uso de las letras.

Una vez lo hayan interiorizado, trabajarán con problemas de operador aditivo, donde la obtención de la ecuación pedida no presenta grandes dificultades para los alumnos.

De esta forma, los alumnos resolverán problemas cada vez más complicados tal y como se ha especificado anteriormente hasta realizar problemas de operador combinado a ambos lados de la igualdad, puesto que este tipo de ecuaciones son las que resultan más complejas para los alumnos.

El procedimiento habitual que se pretende que sigan a la hora de realizar problemas es:

1) Lectura y comprensión del problema.
2) Identificación de los datos que se disponen, y de aquellos que faltan.
3) Averiguar qué te pide el problema.
4) Plantear una ecuación que lo resuelva.
5) Resolver dicha ecuación.
6) Comprobar los resultados.

F) Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Los ejercicios que se van a plantear a continuación para presentar en el aula se pueden clasificar en:

- Expresiones algebraicas
- Valor numérico de expresiones algebraicas
- Igualdades algebraicas
- Ecuaciones de primer grado
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis

Por lo tanto, los ejercicios que se van a presentar en el aula son:

Expresiones algebraicas:

(1) ¿Cuál es el perímetro de cada una de las figuras de la siguiente carta? Debate con tus compañeros para llegar a un acuerdo.

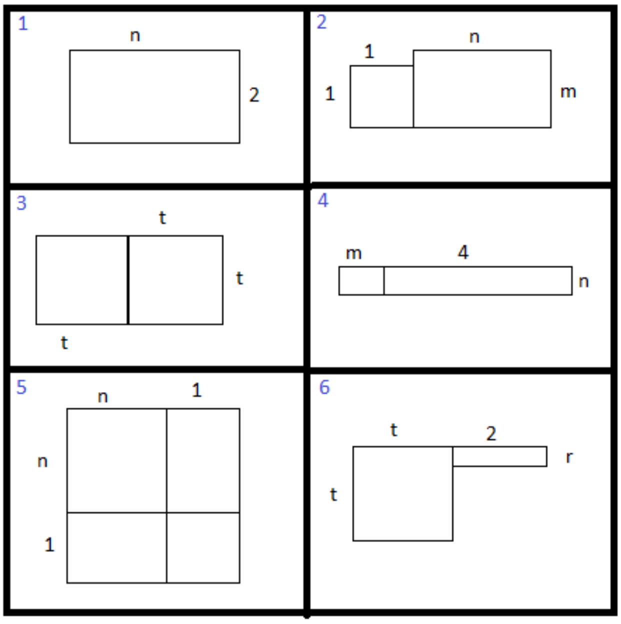

Figura 3. Ficha de perímetros.

(2) Juego de los rectángulos.

Tras repartir un folio a cada alumno, se pide que este se recorte de la siguiente forma:

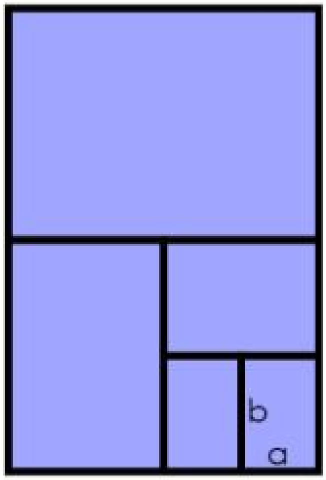

Figura 4. Patrón del juego de los rectángulos.

Y se indica que las medidas de los lados del menor de los rectángulos (a y b)

a) En función de la información dada, ¿Cuánto miden los lados de cada uno de los rectángulos? ¿Y los lados del folio inicial)

b) ¿Cuál es la figura de mayor perímetro que puedes formar a partir de los rectángulos que dispones?

Esta actividad se ha basado en la propuesta en la siguiente página: https://nrich.maths.org/perimeterexpressions

(3) Asocia cada enunciado con su correspondiente expresión algebraica:

a) El doble de un número más 5	i) $n + 3n$
b) 3 menos que un número	ii) $2n + 5$
c) Un número más su triple	iii) $n + 1$
d) El número posterior a n	iv) $n - 3$

(4) Escribe las expresiones algebraicas de los siguientes enunciados:

a) El perímetro de un cuadrado ($l + l + l + l = 4l$)

b) El quíntuple de un número ($5n$)

c) Un número más su consecutivo ($n + (n + 1)$)

d) La octava parte de un número menos 9 ($\frac{n}{8} - 9$)

(5) Compara las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x + 8$ y $x - 1$

b) $2x$ y $9x$

c) $6x + 2$ y $6x + 4$

<u>Valor numérico de las expresiones algebraicas:</u>

(1) Relaciona cada viñeta de la carta con la expresión algebraica que corresponda. Para ello, sustituye la n por el valor que se indica en cada caso y observa cual es la tabla en la que la solución coincide con la de tu expresión. Finalmente, completa los valores de la tabla que faltan.

n	1	2	3	4
=	14	16	18	20

n	1	2	3	4
=			81	144

n	1	2	3	4
=		10	16	22

n	1	2	3	4
=	3		27	48

n	1	2	3	4
=			81	100

n	1	2	3	4
=		10	12	14

Figura 5. Ficha de las tablas.

Expresiones algebraicas:

a) $5n + 4$

b) $3n^2$

c) $(3n)^2$

a) $2(n + 3)$

b) $\frac{(n+4)}{5}$

c) $5(n + 4)$

(2) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2n^2 + 1$ para $n = 2$

b) $3n^3 + 2n + 5$ para $n = -2$

c) $8nm + m$ para $n = 5$ y $m = 4$

d) $\frac{m(n^2+3n)}{2n}$ para $n = 2$ y $m = -2$

Igualdades algebraicas:

(1) ¿Cuáles de las siguientes igualdades son identidades?

a) 3x+2 = 32

b) 3x+2= 2x+x+1+1

c) 2(x+4) + 3x = 5x + 8

d) 3(x+5) + 6 = 24

(2) Identifica en cada caso si se trata de una expresión algebraica, una identidad algebraica o una ecuación (Esta actividad se realizará en los ordenadores).

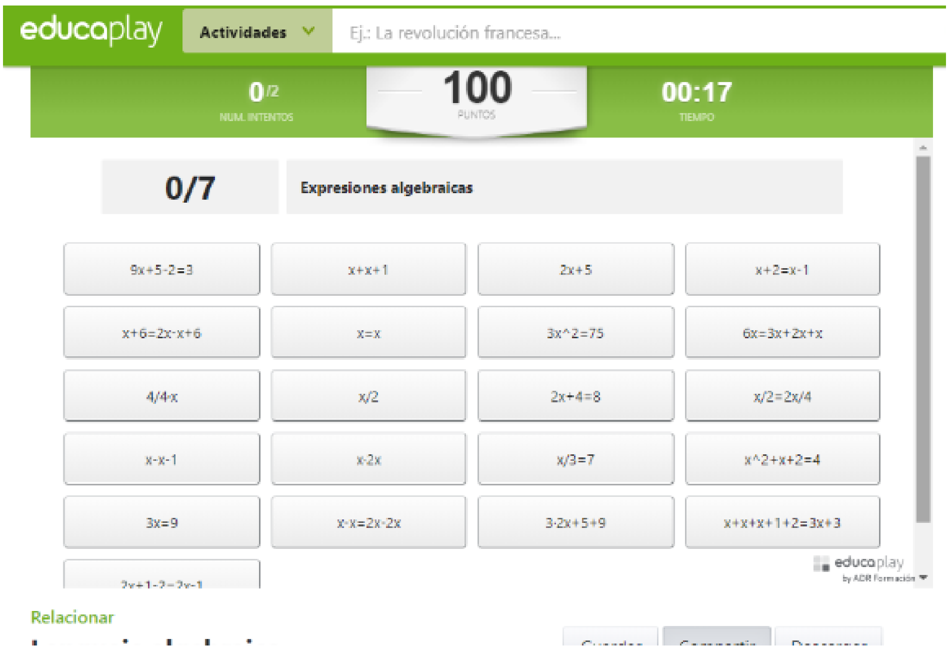

Figura 6. Imagen del juego de educaplay

El enlace a dicha actividad es:

https://es.educaplay.com/recursos-educativos/6043004-lenguaje_algebraico.html

Ecuaciones de primer grado:

(1) Juego del tablero:

Se dividirá a los alumnos en grupos de 5 y se otorgará a cada grupo un tablero de la siguiente forma:

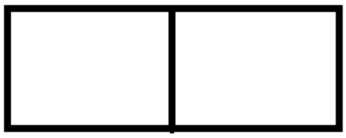

Figura 7. Tablero en blanco.

Los alumnos dispondrán al mismo tiempo de cuatro tipos de fichas que podrán ser:

- Rombos negros: Incógnitas positivas.
- Rombos rojos: Incógnitas negativas.
- Círculos negros: Números positivos.
- Círculos rojos: Números negativos.

Se pedirá que se coloquen las fichas de la siguiente forma:

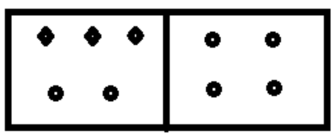

Figura 8. Tablero con fichas.

Y que tras la información dada, sean capaces de escribir la ecuación algebraica que aparece representada en el tablero. Es decir, deben llegar al siguiente resultado: $3x + 2 = 4$

Posteriormente, se informará de que para mover una ficha de un lado a otro del tablero, esta debe de cambiarse por una del color opuesto (si en un lado es roja, al pasarla al otro será negra). Y de que para la resolución de la ecuación, se necesita en primer lugar que en cada lado del tablero solo existan fichas de una misma figura. Los alumnos entonces deberán llegar mover fichas hasta obtener lo siguiente:

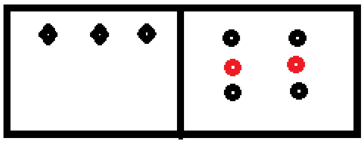

Figura 9. Tablero con fichas manipuladas.

Que de forma algebraica se escribirá: $3x = 4 - 2$

Además, cuando en un mismo lado del tablero, existen dos fichas con la misma figura pero de distinto color, entonces estas desaparecen del tablero, es decir:

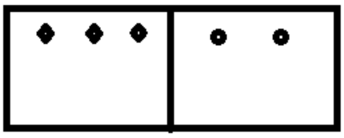

Figura 10. Tablero con fichas reducidas.

Por lo tanto, obtendrán que la ecuación inicial se puede escribir de la forma: $3x = 2$

En el fondo, se trata de utilizar un modelo de neutralización, donde utilizamos fichas de colores que se cancelan, es decir, donde fichas de color rojo neutralizan fichas de color negro y viceversa. En este proceso, la suma se relaciona con el proceso de añadir fichas, mientras que la resta con el de quitar, de este modo, quitar fichas de un color equivale a añadir fichas del otro (Cid, 2016).

Se trata aquí de trabajar la reducción de expresiones algebraicas. No obstante, en actividades posteriores se proporciona un enfoque que podría clasificarse como de aritmética generalizada, donde se trabaja la regla de los signos y la manipulación de paréntesis.

(2) Juego de las frutas.

El profesor proyectará la imagen que se observa en la Figura X.

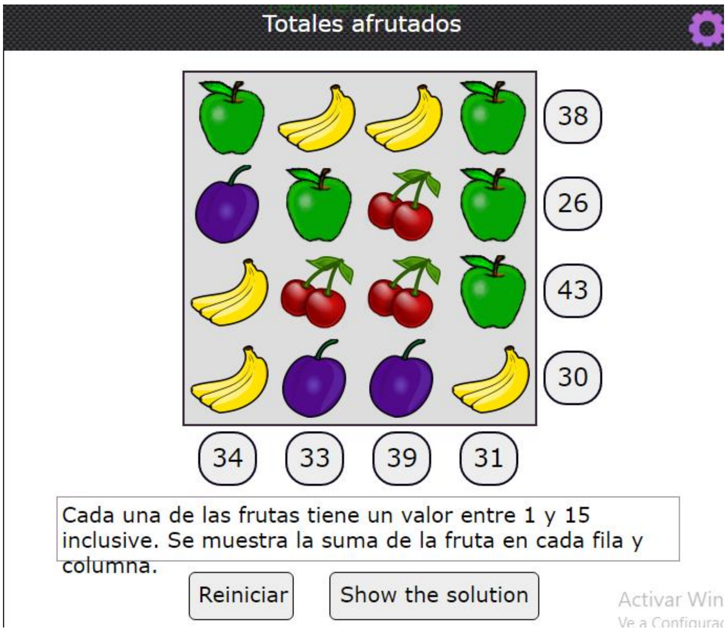

Figura 11. Imagen del juego de las frutas.

Los alumnos deberán adivinar qué número corresponde con cada una de las diferentes frutas.

Esta actividad ha sido tomada de la página:

https://nrich.maths.org/fruity

(3) Simplifica y señala cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación de primer grado con una incógnita:

a) $x^2 + 5x + 2 = 5x$

b) $2x^3 + 6x = 2 + 2x^3$

c) $3x + 5 = 5x + 9$

d) $x - 2x = -x$

(4) Comprueba si x=2 es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 2 = 1$

b) $x + 5 - 2x = 2x - 1$

c) $2x - 2 = 3$

d) $5x - 6x = x - 2x$

<u>Resolución de ecuaciones de primer grado:</u>

(1) Juego de la cadena de ecuaciones.

Figura 12. Imagen del juego de la cadena de ecuaciones.

Se reparten tarjetas/cartas para todos los alumnos de manera que cada uno de ellos disponga de una única tarjeta.

Comienza el juego el alumno que dispone de la primera carta (figura 13).

Figura 13. Imagen de la primera carta.

Este leerá la pregunta que hay escrita en ella y el resto de sus compañeros deberán tratar de solucionarla para ver quién es el que dispone de la siguiente tarjeta (figura 14), que será la que lleve el resultado de esa ecuación.

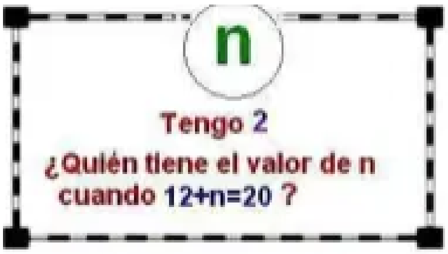

Figura 14. Imagen de la segunda carta.

Los estudiantes continuarán resolviendo tarjetas por orden hasta llegar a la última y cerrar el círculo (figura 15).

Figura 15. Imagen de la última carta.

La actividad presentada se tomó de la página: https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2020/02/25/cadena-de-ecuaciones-muy-iniciales-juego-quien-tiene-yo-tengo/

(2) Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x + 2 = 5$

b) $x + 5 - 6 = 2 + 3$

c) $x - 7 = 12$

d) $2x + 3x - x = 6$

e) $6 = \frac{x}{3}$

f) $-6 - 2x = -2 - x$

g) $3x - x + 5 = 10 + x$

<u>Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones:</u>

(1) Juego de las pirámides.

a) Se proyectará en la pizarra la imagen que se observa en la figura 16.

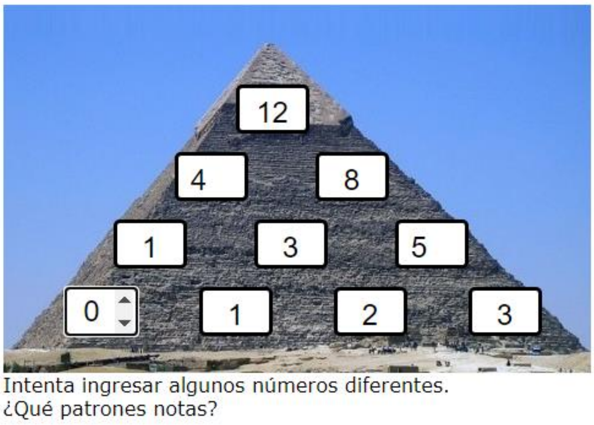

Figura 16. Imagen de la primera pirámide.

Los alumnos propondrán números aleatorios para introducir en la parte inferior izquierda de la pirámide. Se indica que el resto de números dependen del valor que se introduzca en dicha casilla y se pedirá que traten de obtener las expresiones algebraicas correspondientes en cada casilla y cuáles son las relaciones que hay entre las casillas de diferentes filas.

Adaptación del juego que aparece en:

https://nrich.maths.org/morenumberpyramids

b) Se proyectará la nueva pirámide (figura 17) donde aparecen las expresiones algebraicas de las casillas de la fila inferior.

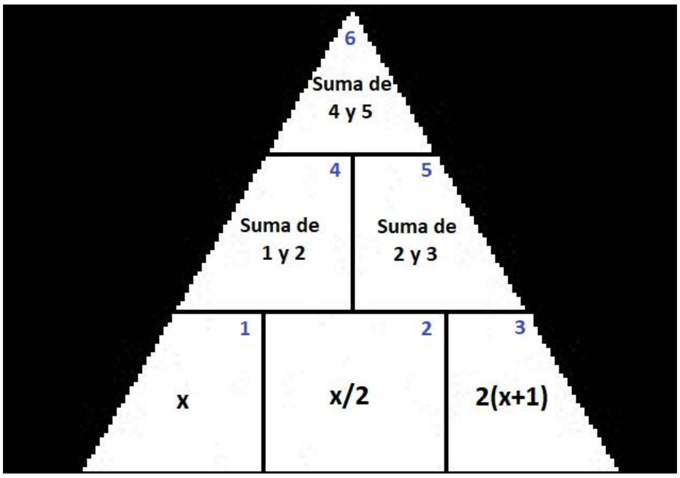

Figura 17. Imagen de la segunda pirámide.

Y se pedirá a los alumnos que calculen las expresiones que faltan, así como los números correspondientes de las 6 casillas en función de tres valores distintos de x.

c) Se proyectará una última pirámide (figura 18).

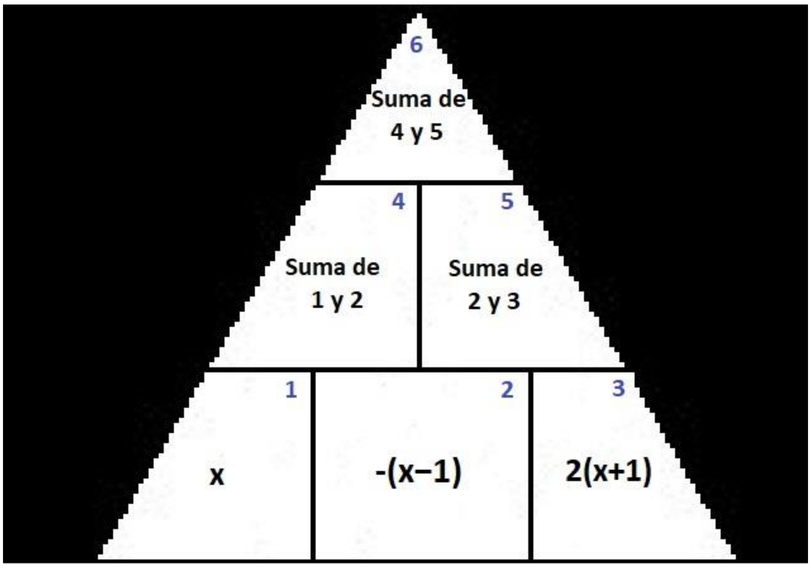

Figura 18. Imagen de la última pirámide.

Y se preguntará a los alumnos las siguientes cuestiones:

- Si la primera casilla fuese 4 y la segunda $-(4-1)$ y ambas casillas se suman, ¿Es lo mismo restarle a la primera casilla 4 y luego sumarle 1 que restarle 3?
- En la casilla 4, ¿Variará el número obtenido en función del valor que le demos a x en la casilla 1?
- ¿Cuál de estas dos opciones es la correcta para la casilla 2?
  La primera opción es: $-x-1+2x+2=x+1$
  La segunda opción es: $-x+1+2x+2=x+3$
- ¿Qué habrá que poner en la casilla 6?

(2) Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a) $13-(2x-2)=3x$

b) $8x-(9-2x)=71$

c) $2(x+5x)+1=13$

d) $3(2x-1)+21=5(3x-2)+1$

(3) Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con fracciones

a) $\frac{4x+2}{2}=x+5$

b) $\frac{5(6x+1-2x)}{4} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{6x}{5} = \frac{x+1}{2}$

d) $\frac{x-2}{8} - \frac{3(x+6)}{4} + x = -1$

(4) Simplifica y resuelve:

a) $\frac{x-2}{8} - \frac{3(x+6)}{4} - 2(2x+1) + 5x + 2 = -1$

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Entendemos por técnicas el conjunto de procedimientos o recursos que se utilizan a la hora de resolver los problemas. A través de los ejercicios propuestos anteriormente, vamos a tratar de ejercitar dichas técnicas para que los alumnos puedan interiorizarlas y entenderlas en su totalidad para poder enfrentarse de manera satisfactoria a la resolución de problemas sobre el objeto matemático a tratar.

En primer lugar, se pretende introducir a los alumnos en el lenguaje algebraico, para ello se tratará de explicar los diferentes usos y significados de las letras. Según la clasificación propuesta por Küchemann, podemos distinguir 6 tipos de categorías diferentes según su interpretación y uso (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1999):

- Letras evaluadas: Asignamos un valor numérico a cada letra desde el principio. Ejemplo: Halla el valor de $n + 5 + 2n - 2$ para $n = 1$. Sol: $1 + 5 + 2 - 2 = 6$
- Letras ignoradas: A pesar de reconocer las letras, no les asignamos un significado específico.
  Ejemplo: Si $n + m = 15$ ¿Cuánto es $n + m - 5$? Sol: $n + m - 5 = 10$
- Letras como objeto: Se elimina el significado abstracto de las letras, otorgándoles un significado real.
  Ejemplo: Calcular el perímetro de un cuadrado de lado l. Sol: $4l$
- Letras como incógnitas específicas: Se consideran las letras como números desconocidos pero específicos sobre los que se puede operar.
  Ejemplo: Problemas sobre edades, las letras se entienden como edades que hay que hallar.

- Letras generalizando números: Letras como representación de un conjunto de números.
  Ejemplo: ¿Qué valores puede tomar n si $n + m = 10$ y $n < m$? Sol: n puede tomar los valores del conjunto $\{0,1,2,3,4\}$.
- Letras como variables: Letras como representación de un conjunto de valores, pero no especificados.
  Ejemplos: Funciones.

A continuación, se explicará e introducirá el signo de igualdad. En aritmética dicho signo ($" = "$) es entendido como una acción física, es decir, el signo igual conecta el resultado con las operaciones numéricas. Ejemplo: ¿Cuál es el resultado de la operación $4 + 2$? Sol: $4 + 2 = 6$.

Sin embargo, en álgebra, dicho signo es entendido de distinto modo puesto que representa una relación entre las expresiones que se encuentran a la izquierda con las de la derecha. Ejemplo: $4x + 5 = 2x + 2x + 3 + 2$.

Siguiendo con dicho tema, es importante que los alumnos comprendan y tengan clara la diferencia entre identidad y ecuación:

- Identidad: Igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de las letras.
  Ejemplo: $a(b + c) = ab + ac$
- Ecuación: Igualdad algebraica que se verifica solamente para ciertos valores de las letras (incógnitas), que serán la solución de dicha ecuación.
  Ejemplo: $4x + 2 = 6$, entonces $x = 1$.

Además, deberán aprender a simplificar expresiones algebraicas, puesto que la reducción de expresiones algebraicas les facilitará el trabajo a la hora de resolver las ecuaciones de primer grado. Los alumnos simplificarán expresiones algebraicas para obtener expresiones mucho más sencillas y fáciles de manipular.

Finalmente se mostrarán las herramientas necesarias para la resolución de ecuaciones de primer grado. Resolver una ecuación consiste en encontrar el valor o los valores de la incógnita para que se cumpla la igualdad. Para la resolución de ecuaciones podemos usar:

- Si sumamos, restamos, multiplicamos, o dividimos a ambos lados de la igualdad, obtenemos ecuaciones equivalentes que seguirán teniendo como solución el mismo valor para la incógnita.
- Si disponemos de un término que está sumando a un lado de la igualdad, este pasará restando al otro lado (y viceversa). Esta herramienta está basada en la obtención d ecuaciones equivalentes, pues consiste básicamente en sumar o restar por el mismo número a ambos lados de la igualdad para obtener una ecuación equivalente.
- Un término que multiplica a un lado de la igualdad, pasará al otro lado dividiendo. Es decir, si dividimos por el mismo valor a ambos lados de la igualdad, obtenemos una ecuación equivalente.
- Un término que divide a un lado de la igualdad, pasará al otro lado multiplicando. Si multiplicamos por el mismo valor a ambos lados de la igualdad obtenemos una ecuación equivalente.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Sí, puesto que el campo de problemas planteado puede resolverse a partir de la implementación de las técnicas propuestas y trabajadas en clase.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los ejercicios propuestos en este apartado se presentan de forma gradual para lograr comprender en su totalidad el concepto de expresión algebraica y ecuación.

Es por ello que en primer lugar el alumno deberá adecuarse a la introducción de letras en sus operaciones y a la aparición del concepto de álgebra y expresiones algebraicas. Aprenderá a traducir a lenguaje algebraico diferentes enunciados y a obtener el valor numérico de diferentes expresiones algebraicas según el valor que se les otorga a las letras que aparecen en ellas.

Una vez queden afianzados dichos conceptos, los alumnos deberán comprender la diferencia entre ecuación e identidad, y lograr de este modo familiarizarse con las ecuaciones de primer grado y su uso.

Se prestará especial atención en explicar la importancia de la simplificación antes de enseñar a resolver dichas ecuaciones, puesto que la reducción les facilitará el trabajo obteniendo expresiones más sencillas sobre las que actuar.

Para la implementación de la resolución de ecuaciones de primer grado, es necesario que los alumnos interioricen las diferentes herramientas de las que disponen a la hora de trabajar con las distintas ecuaciones. Los ejercicios se presentan de forma gradual, de más sencillo a más difícil. Por lo que comienzan resolviendo ecuaciones sencillas donde la agrupación de términos (agrupar las incógnitas, los términos independientes…) les ayudará a reducirlas. Durante estos primeros ejercicios los alumnos deberán realizar transposiciones sencillas como el paso de términos que están sumando a un lado de la igualdad, al otro lado restando, y viceversa. Así como pasos de términos que están multiplicando, dividiendo, o aquellos que están dividiendo, multiplicando.

Finalmente, se propondrán ejercicios más complicados donde la jerarquía de las operaciones tiene un papel fundamental en su resolución. De este modo si aparecen paréntesis estos deberán ser los primeros en solucionarse. Además, se presentarán ecuaciones con fracciones donde los alumnos deberán introducir el uso del común denominador en su método de resolución.

G) Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Como se ha comentado anteriormente, las técnicas que se ejercitan en los distintos ejercicios son:

- <u>Traducción a lenguaje algebraico (uso de las letras o incógnitas, del signo igual...)</u>
- <u>Valor numérico de expresiones algebraicas</u>
- <u>Simplificación de expresiones algebraicas.</u>
- <u>Resolución de ecuaciones de primer grado.</u>

Existen una serie de tecnologías que justifican y sustentan dichas técnicas, las cuales vamos a nombrar y explicar a continuación.

Para la traducción a lenguaje algebraico, así como la obtención del valor numérico de una expresión algebraica utilizaremos las siguientes tecnologías que las justifican:

- El álgebra es un nuevo lenguaje matemático formado por letras, números y signos que se presentará a los alumnos de primero de la ESO para que sean capaces de traducir diferentes enunciados a lenguaje algebraico, adoptando así un sentido matemático. Así como comprender dicho lenguaje en su totalidad para ser capaces de obtener el valor numérico de una expresión algebraica.

En la justificación de la técnica de simplificación de expresiones algebraicas intervienen las siguientes tecnologías:

- La agrupación de términos semejantes para la simplificación de expresiones algebraicas.
- El orden o jerarquía de las operaciones (paréntesis, exponentes, multiplicación, división, suma y resta).

Las tecnologías que justifican la técnica de resolución de ecuaciones de primer grado son las siguientes definiciones:

- "Al sumar, restar, multiplicar y dividir por lo mismo a ambos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente"
- "Dos ecuaciones equivalentes poseen la misma solución".

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Las tecnologías que justifican las técnicas se irán introduciendo poco a poco a medida que estas se vayan necesitando y utilizando durante el desarrollo del objeto matemático. La responsabilidad de justificar las técnicas recae entonces de forma paralela tanto en los alumnos como en el propio profesor, cuya labor consiste en guiarles en el aprendizaje del álgebra y la resolución de ecuaciones de primer grado y darles las pautas para que sean ellos mismos quienes reflexionen sobre cómo utilizar cada tecnología que se les ofrece.

Durante este curso, el profesor introducirá el álgebra como nuevo lenguaje matemático y previamente a esto se habrán repasado, durante la primera sesión de la secuencia didáctica, los conceptos aritméticos necesarios para facilitar la comprensión del nuevo objeto a introducir (las operaciones aritméticas que se realizan durante el proceso de resolución de ecuaciones, así como la jerarquía de las operaciones o las propiedades de la suma y la multiplicación) puesto que estos ya han sido explicados en cursos anteriores.

La definición de ecuaciones equivalentes será explicada por el profesor, sin embargo, los alumnos pueden lograr razonar y comprender las tecnologías como reducción de términos y agrupación de términos semejantes mediante el juego del tablero del que se habla en el apartado de presentación de las técnicas, así como el juego de la balanza que se presentará el primer día de clase para la introducción del objeto matemático a enseñar.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

El principal objetivo del profesor es introducir en los alumnos este nuevo lenguaje matemático, que los alumnos aprendan y comprendan el álgebra en su totalidad y que puedan manejarse con ecuaciones de primer grado con facilidad. Se pretende que sean los propios alumnos los que adquieran dichos conocimientos, que aprendan a pensar por ellos mismos y a buscar el sentido lógico del objeto matemático. Es importante que los alumnos comprendan la utilidad real de los distintos aspectos a tratar, por ejemplo, comprender las dos definiciones que justifican la técnica de resolución de ecuaciones de primer grado mediante materiales manipulativos que se llevarán a clase (balanzas y las pesas correspondientes).

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología a seguir en la implementación de las tecnologías que justifican las técnicas en el aula coincide con la expuesta en el apartado anterior, en la explicación de la metodología seguida para la implementación de las técnicas, pues las tecnologías se irán introduciendo a la par de las técnicas para poder justificarlas.

Se presentarán los ejercicios que trabajan las técnicas de forma gradual para que los alumnos vayan trabajando y afianzando los conceptos poco a poco y de forma ordenada.

En un primer lugar, durante el primer día de clase se realizará una evaluación inicial para que el profesor obtenga la información necesaria sobre los conocimientos aritméticos que los alumnos disponen, y se encargará de repasar aquellos conceptos que generen más dudas según los resultados de la prueba.

Los alumnos deberán adecuarse a la introducción de letras, y a la aparición del álgebra como nuevo lenguaje matemático. El estudiante aprenderá a traducir a lenguaje algebraico haciendo uso de expresiones algebraicas y a obtener el valor numérico de estas logrando así comprender este nuevo objeto en su totalidad.

Posteriormente se trabajará con la agrupación de términos semejantes mientras los alumnos aprenden a simplificar expresiones algebraicas para obtener expresiones más sencillas que luego tendrán que manejar.

Finalmente, se utilizarán las tecnologías vistas hasta entonces, así como las dos definiciones nombradas en la primera de las preguntas de este apartado, para resolver ecuaciones de primer grado. Estos tipos de ejercicios se presentarán de más sencillo a más difícil para que los alumnos vayan adquiriendo las habilidades de uso de las tecnologías requeridas poco a poco.

El objetivo principal de esta forma de implementar las tecnologías en el aula es que los alumnos adquieran dichas habilidades mediante el uso del razonamiento, y que a pesar de que van a estar guiados por el docente, sean ellos mismos quienes van averiguando las formas de justificar las técnicas que se les presentan.

H) Sobre la secuencia didáctica y su cronología

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

SESIÓN 1:

La primera sesión de esta secuencia didáctica está dedicada a la elaboración, por parte de los alumnos, de una evaluación inicial a partir de la cual se podrá comprobar el grado de conocimientos de los alumnos sobre los conceptos necesarios para introducir el álgebra como nuevo objeto matemático.

Dicha prueba se realizará en la sala de ordenadores a partir de la plataforma SurveyMonkey y con ella se tratará de averiguar si los alumnos recuerdan las operaciones aritméticas básicas, así como las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del producto.

En función de los resultados obtenidos en esta prueba, el profesor tendrá información sobre aquellos aspectos en los que debería insistir y volver a repasar a la hora de impartir el resto de sesiones.

La prueba en cuestión será:

https://es.surveymonkey.com/r/CKZ6SNG

Repaso

1. ¿Cual de las siguientes igualdades es incorrecta?

- ○ 5·(2+3)= 5·2 + 5·3
- ○ 6+2·(1+4)=8·(1+4)
- ○ 7+4·(2+3)=7+4·2+4·3

2. Calcula: 2+5·(2+3)+4(1-2)

3. Señala la opción correcta:
6+3(1-1)=

- ○ 6
- ○ 12
- ○ 0

4. Señala la opción incorrecta:
(4-2)/2=

- ○ 1
- ○ 2-1
- ○ 2-2

5. Calcula: 5/(4+1)

6. Señala si es verdadero o falso: (4 + 3) – (5·2) + 2 = 7 + 10 +2 = 19

◯ Verdadero

◯ Falso

7. Si tu respuesta ha sido falso, ¿Porqué?

8. ¿Cuál sería la solución correcta de (4+3)-(5·2)+2?

9. ¿Qué número falta en la siguiente igualdad?
5+__=7

◯ 13

◯ 1

◯ 2

10. ¿Qué número falta?
__ - 5 = 5

SESIÓN 2:

Esta segunda sesión se dedicará a introducir por primera vez el álgebra en el aula. A partir de las actividades propuestas en el apartado D, se pretende que los alumnos comprendan este nuevo objeto matemático y su utilidad.

En primer lugar, se realizará la actividad de la balanza. El profesor llevará a clase una balanza y pesas de 50 g, así como diferentes objetos de distintos tamaños. Los alumnos, de manera grupal, deberán llegar a la conclusión de cuál es el peso de cada uno de los objetos que se van colocando en uno de los lados de la balanza a partir de los pesos que se colocan en el otro lado. De esta forma, se pretende un debate grupal en el que los alumnos conversen entre ellos para llegar a la solución.

Posteriormente se realizará el juego de las tarjetas para que de nuevo, mediante un debate grupal, traten de averiguar cuántas tarjetas con X se han repartido.

Finalmente, para terminar esta sesión de introducción al álgebra, se dividirá a la clase en grupos reducidos y heterogéneos de 4 o 5 personas y se repartirá el último problema propuesto en el apartado D. Cada grupo deberá averiguar qué es lo que se pide para posteriormente poner en común los resultados con el resto de la clase.

SESIÓN 3:

El objetivo principal de esta sesión es que los alumnos comiencen a familiarizarse con el uso del lenguaje algebraico, así como aprender a traducir enunciados a lenguaje algebraico y viceversa.

Para ello se dividirá de nuevo la clase en pequeños grupos heterogéneos y se repartirá a cada uno la ficha del primero de los ejercicios propuestos en el apartado F (de la parte de expresiones algebraicas), donde aparecen varias figuras y se pide que se calcule el perímetro de cada una. De este modo los alumnos, trabajando de manera colaborativa, comenzarán a trabajar con letras, algo a lo que no están acostumbrados.

Tras poner en común los resultados de cada grupo, el profesor preguntará a sus alumnos sobre qué representan cada una de las letras y entre todos llegarán a la conclusión de que estas representan números de los cuales no se dispone de su valor (incógnitas).

Posteriormente, se otorgará a cada grupo una hoja, una regla y unas tijeras y los alumnos realizarán el ejercicio de los rectángulos propuesto en el apartado F, en el cual, mediante un debate del grupo, deberán averiguar cuáles serán las medidas de los lados de cada uno de los triángulos obtenidos, así como la figura de mayor perímetro que se puede obtener a partir de todas las piezas obtenidas.

Así pues, una vez los alumnos han trabajado lo suficiente con las letras hasta lograr comenzar a familiarizarse con ellas, el profesor comenzará a explicar el lenguaje algebraico y las expresiones algebraicas para finalmente realizar los dos ejercicios siguientes (3 y 4) de manera individual (aunque permitiendo que los alumnos compartan sus respuestas para ayudarse los unos a los otros).

SESIÓN 4:

Se realizarán los ejercicios 1) y 2) del apartado E, de la parte de traducción a lenguaje algebraico y el último de los ejercicios del apartado F de la parte de expresiones algebraicas durante la primera parte de la sesión.

Durante la segunda parte de la clase, se dividirá a los alumnos en pequeños grupos de cuatro o cinco personas y se repartirá una ficha con la tabla que aparece en el ejercicio 1) de la parte de valor numérico de una expresión algebraica. Los alumnos tratarán de averiguar que expresión algebraica corresponde a cada una de las tablas, para ello tendrán que llegar a deducir entre todos los integrantes del grupo que al sustituir la letra n por los diferentes números, da el resultado correspondiente.

Finalmente, y tras la realización de debates intragrupos y intergrupos, se explicará la teoría correspondiente a la obtención del valor numérico de expresiones algebraicas y se realizará el segundo ejercicio de ese apartado.

SESIÓN 5:

Esta sesión se realizará en la sala de ordenadores. En ella se comenzará la clase con la primera parte del juego del tablero, los alumnos recibirán un tablero con fichas colocadas por el profesor y se informará de las reglas explicadas en el apartado F. En los distintos tableros, los alumnos obtendrán tanto identidades algebraicas como ecuaciones que se irán apuntando a la pizarra conforme los estudiantes las vayan adivinando. Posteriormente, se tomará una de las identidades algebraicas y una de las ecuaciones de primer grado obtenidas y se preguntará a los alumnos sobre la diferencia entre ambas.

Tras aquel debate, se explicará el concepto de identidades algebraicas y se realizará el primero de los ejercicios propuestos de esa parte. Finalmente, se realizará el segundo de los ejercicios mediante el ordenador a partir de la plataforma EducaPlay.

SESIÓN 6:

El principal objetivo de esta sexta sesión es que los alumnos se familiaricen con las ecuaciones de primer grado, para ello se volverá a dividir la clase en pequeños grupos heterogéneos y se repartirán tableros para jugar a dicho juego de nuevo, pero esta vez permitiendo que los alumnos manipulen las fichas para que logren hacerse una idea de cómo pueden simplificar expresiones algebraicas (reducir términos), operar con monomios semejantes y transportar términos.

Una vez realizado este ejercicio, y manteniendo los grupos de la actividad anterior, el profesor proyectará, para toda la clase, la actividad de las frutas, donde cada una de las diferentes frutas representan números que se quieren calcular. Los alumnos deberán adivinar el valor de cada incógnita (cada fruta) mediante debates entre los integrantes del grupo.

Como cabe esperar, el principal método de resolución de esta actividad será el tanteo, pero ayudará a los alumnos a comprender que en cada incógnita solo encaja un único valor.

Al finalizar esta actividad, se explicará la teoría correspondiente y se realizarán los ejercicios 3) y 4) de la parte de ecuaciones de primer grado del apartado F.

SESIÓN 7:

Al iniciar esta séptima sesión, el profesor recordará la teoría vista en la clase anterior así como el juego de las frutas, a partir de esta teoría se preguntará a los estudiantes cómo poder calcular el valor de cada fruta sin necesidad de utilizar el tanteo, y de este modo irá explicando la resolución de ecuaciones de primer grado.

Una vez dadas las explicaciones pertinentes, se jugará al juego de cartas propuesto en el apartado F repartiendo tarjetas a toda la clase favoreciendo así que los alumnos comiencen a practicar la resolución de ecuaciones de primer grado de forma conjunta.

Finalmente, se realizará el segundo ejercicio propuesto sobre resolución de ecuaciones de primer grado.

SESIÓN 8:

Para comenzar la sesión, el profesor proyectará en la pizarra una pirámide y pedirá a los alumnos que propongan números aleatorios para poner en la esquina inferior izquierda de esta. Dichos valores determinarán todos los demás números, por lo que los alumnos tratarán de adivinar cuál es la expresión algebraica que corresponde en cada casilla. Una vez los hayan adivinado, se preguntará a los alumnos sobre los valores que jamás podrán obtener en las filas superiores para crear debate. Posteriormente, se proyectarán dos pirámides de tres pisos realizadas por el profesor donde en cada casilla hay operaciones con paréntesis o fracciones. Los alumnos volverán a proponer números aleatorios y entre todos resolverán las distintas expresiones para familiarizarse con la resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones.

El profesor propondrá las siguientes ecuaciones en la pizarra:

a) $13-(2x-2)=3x$
b) $\frac{4x+2}{2}=x+5$

Las cuales resolverán de manera conjunta ayudados por las pistas e indicaciones del profesor. Finalmente, se propondrán los ejercicios 2), 3) y 4) del apartado F de la parte correspondiente a resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones para que los alumnos practiquen de forma individual aunque fomentando el diálogo entre ellos para que puedan ayudarse los unos a los otros.

SESIONES 9, 10, 11 y 12:

El profesor recordará las tres actividades que los alumnos realizaron durante la sesión 2, y preguntará sobre como las resolverían mediante ecuaciones de primer grado.

Posteriormente, se explicarán los procedimientos a seguir en la resolución de problemas y finalmente, a lo largo de estas cuatro sesiones, los alumnos realizarán los problemas propuestos en el apartado E de forma gradual de más sencillo a más complicado (salvo los correspondientes a traducción a lenguaje algebraico pues estos se han realizado con anterioridad). Además, el profesor hará las correcciones oportunas de aquellos problemas que resulten más complicados para los alumnos, ayudado por los propios estudiantes.

SESIÓN 13:

Esta sesión previa a la prueba escrita final de la unidad didáctica se dedicará a repasar todos los conceptos dados durante las clases anteriores así como a resolver las dudas que les hayan surgido a los alumnos a lo largo de la unidad.

SESIÓN 14:

Se realizará la prueba escrita propuesta en el apartado I que evaluará el aprendizaje realizado por los alumnos.

Tras la finalización de la prueba escrita realizada en clase para ser evaluada por parte del docente, se repartirá a cada alumno una ficha con dichos enunciados para que estos realicen de nuevo esos mismos problemas y ejercicios en casa de forma individual pero esta vez disponiendo de todos los apuntes tanto del libro de texto como de los facilitados por el profesor durante el curso

SESIÓN 15:

Durante esta sesión, el profesor repartirá de forma individual a cada alumno su examen para que pueda observar su calificación y las anotaciones de cada ejercicio. Se pedirá que lean la prueba con detenimiento, mientras comparan lo realizado durante el examen con las resoluciones que han hecho en casa, fijándose en los fallos que han cometido en ambos intentos, en aquellas cosas que han mejorado en la resolución en casa o aquello que han empeorado.

Finalmente, y tras esta revisión individual y privada de cada alumno, el profesor corregirá cada una de las actividades en la pizarra de forma conjunta, preguntando de manera individual a alumnos concretos o de forma grupal a toda la clase, sobre los pasos a seguir para que sean los propios alumnos los que vayan resolviendo cada problema y ejercicio mientras el profesor va guiándoles y ayudándoles mientras copia los procedimientos y resultados en la pizarra. (Rochera, Colomina y Barberá, 2001)

2. Establece una duración temporal aproximad

Esta secuencia didáctica está formada por aproximadamente 15 sesiones en las cuales se trabajará el objeto matemático propuesto en este trabajo. Estas sesiones tendrán una duración de 50 minutos cada una.

Durante el curso de 1º de ESO, los alumnos reciben 4 horas semanales de la asignatura de matemáticas, es por ello que esta unidad didáctica tendrá una duración de 3 semanas completas y $\frac{3}{4}$ de la siguiente.

I) Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

La prueba escrita consta de 5 preguntas con sus respectivos apartados. Se dispone de 50 minutos así que el alumno debería invertir una media de 10 minutos por pregunta.

A continuación, vamos a enunciar los diferentes apartados planeados para la prueba:

Problema 1:

Traduce cada enunciado a lenguaje algebraico.

1. La edad de Pedro y Juan si Pedro es dos años mayor que su hermano Juan.
2. La suma de tres números consecutivos.
3. La diferencia entre un número y el triple de su doble.

4. El número de caramelos que tienen Pedro y Juan, si Juan tiene el doble de caramelos más dos.

Problema 2:

Calcula los siguientes números mediante el uso de ecuaciones algebraicas de primer grado:

1. Si a un número le quito 5 obtengo 15.
2. La suma de un número y su doble es 21.
3. El triple de la suma entre un número y su anterior es 33.

Problema 3:

Dentro de 12 años Miriam tendrá el triple de años de los que tenía hace 4 años. ¿Qué edad tiene Miriam actualmente? (Utilizando ecuaciones de primer grado)

Problema 4:

Halla las medidas que se piden en cada apartado haciendo uso de ecuaciones de primer grado:

1. El perímetro de un triángulo equilátero es 9. ¿Cuánto mide cada lado?

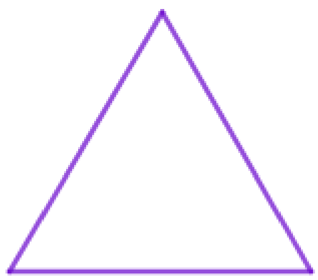

Figura 19. Imagen triángulo problema 4.

2. Se tiene la siguiente figura donde el perímetro del rectángulo mide 14 cm, y su base 3 cm más que su altura. Si los dos lados iguales del triángulo isósceles miden 1 cm más que la altura del rectángulo. ¿Cuál es el perímetro del triángulo? ¿Y de la figura?

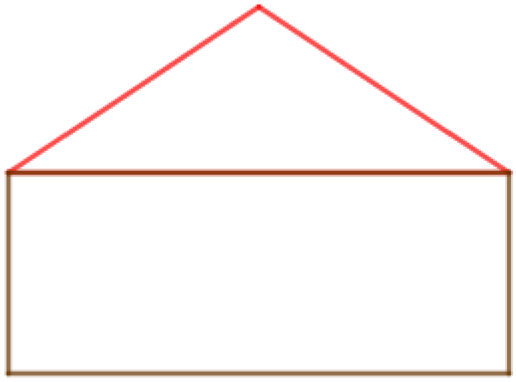

Figura 20. Imagen figura del problema 4.

Problema 5:

Durante el inicio de curso, Alba gasta 27 € en comprar rotuladores de colores y cuadernos. El precio de un rotulador es de 2 €, mientras que un cuaderno cuesta 3€. ¿Cuántos rotuladores y cuadernos ha comprado si se ha llevado el triple de rotuladores que de cuadernos? (Utiliza ecuaciones de primer grado)

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

A continuación, vamos a clasificar los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que se pretenden evaluar en cada una de las preguntas de la prueba escrita planteada. Además, vamos a clasificar las tareas en tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales.

Problema 1:

Campo de problemas según dificultad: El primer apartado es de operador aditivo (O1), el tercer apartado es de operador multiplicativo (O2), mientras que el segundo y cuarto apartado son de operador combinado (O3). Además, en este problema se pretende evaluar la traducción a lenguaje algebraico.

Técnicas: En este problema se utiliza la traducción a lenguaje algebraico como técnica principal, pues consiste en varios enunciados que tenemos que poner en forma de expresiones algebraicas haciendo uso de incógnitas.

Tecnologías: La traducción a lenguaje algebraico se justifica a partir de un nuevo lenguaje (álgebra) en el que llamamos con una letra a aquellas incógnitas que desconocemos.

Tareas:

- Tareas principales: Expresar adecuadamente el enunciado en cada caso, concretamente: a) Traducir correctamente las edades de Pedro y Juan en función de la que se utilice como incógnita. b) Identificar tres números consecutivos y relacionarlos correctamente. c) Escribir adecuadamente la expresión que se pide. d) Expresar adecuadamente el número de caramelos de cada uno estableciendo las relaciones correctas de lo que pide el enunciado.
- Tareas auxiliares específicas: No hay.
- Tareas auxiliares generales: No hay.

Problema 2:

Campo de problemas según dificultad: El primer apartado es de operador aditivo (O1), el segundo de operador multiplicativo (O2), y el tercero de operador combinado (O3).

Técnicas: Previamente a la resolución de problemas se utiliza la traducción a lenguaje algebraico, así como la simplificación de expresiones algebraicas (en el apartado b y c). Tras la obtención de ecuaciones de primer grado simplificadas, se resuelven dichas ecuaciones obteniendo el valor de las incógnitas. En el tercer apartado, se resuelve una ecuación de primer grado con paréntesis, deshaciéndonos en primer lugar de este y simplificando al máximo la ecuación para después obtener la solución de la incógnita.

Tecnologías: Las tecnologías que justifican las técnicas son, el álgebra para la traducción a lenguaje algebraico previamente a la solución del problema, para la simplificación de las expresiones algebraicas en los apartados b y c agrupamos en términos semejantes teniendo en cuenta el orden de las operaciones y la resolución de las ecuaciones de primer grado se justifican a partir de las siguientes definiciones: “Al sumar, restar, multiplicar y dividir por lo mismo a ambos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente" y "Dos ecuaciones equivalentes poseen la misma solución".

Tareas:

- Tareas principales: Traducir correctamente el enunciado de cada apartado del problema obteniendo la ecuación correcta: a) Deducir que hay que restar 5 a la incógnita para obtener 15. b) Saber que hay que sumar a un número el doble de él mismo para obtener 21. c) Deducir cual es el anterior de un número y expresar lo pedido en el enunciado.
- Tareas auxiliares específicas: Procesos de reducir términos, operar monomios semejantes y trasponer términos tras haber planteado cada ecuación. a) Transponer términos, en este caso: $x - 5 + 5 = 15 + 5$. b) Operar hasta reducir términos a: $3x = 21$ y transponerlos: $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$. c) Reducir términos y operar monomios semejantes para transponer términos después.
- Tareas auxiliares generales: Realización de operaciones aritméticas al simplificar como por ejemplo en el apartado b) $\frac{21}{3} = 7$.

Problema 3:

Campo de problemas según dificultad: Se trata de un operador combinado a ambos lados de la igualdad (O4).

Técnicas: Previo a la resolución de problemas se traduce el enunciado a lenguaje algebraico obteniendo una ecuación de primer grado con paréntesis y se simplifica dicha ecuación deshaciéndonos de los paréntesis. Finalmente se resuelve la ecuación.

Tecnologías: Las tecnologías que justifican las técnicas son, el álgebra para la traducción a lenguaje algebraico previamente a la solución del problema, para la simplificación de la expresión algebraica utilizaremos la agrupación en términos semejantes teniendo en cuenta el orden de las operaciones y la resolución de la ecuación de primer grado se justifica a partir de las siguientes definiciones: "Al sumar, restar, multiplicar y dividir por lo mismo a ambos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente" y "Dos ecuaciones equivalentes poseen la misma solución".

Tareas:

- Tareas principales: Traducir correctamente el enunciado obteniendo la ecuación correcta.
- Tareas auxiliares específicas: Tras haber planteado la ecuación, procesos de reducir términos, operar monomios semejantes y trasponer términos.
- Tareas auxiliares generales: Realización de operaciones aritméticas al simplificar hasta obtener la solución de la incógnita.

Problema 4:

Campo de problemas según dificultad: El primer apartado es de operador multiplicativo(O2) y en el segundo apartado la ecuación principal es de operador combinado (O3), mientras que para calcular tanto la base del rectángulo como los lados iguales del triángulo usamos un operador aditivo (O1).

Técnicas: Antes de resolver los problemas, se utiliza la traducción a lenguaje algebraico obteniendo en el primer apartado una ecuación de primer grado que se debe simplificar para posteriormente hallar la solución pedida y en el segundo apartado una ecuación de primer grado con paréntesis que se simplificará para calcular las soluciones pertinentes del problema.

Tecnologías: Las tecnologías que justifican las técnicas son: el álgebra para la traducción a lenguaje algebraico previamente a la solución del problema, para la simplificación de las expresiones algebraicas en ambos apartados agrupamos en términos semejantes teniendo en cuenta el orden de las operaciones y la resolución de las ecuaciones de primer grado se justifican a partir de las siguientes definiciones: “Al sumar, restar, multiplicar y dividir por lo mismo a ambos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente” y “Dos ecuaciones equivalentes poseen la misma solución”.

Tareas:

- Tareas principales: Traducir correctamente el enunciado de cada apartado del problema obteniendo la ecuación correcta.
- Tareas auxiliares específicas: En cada apartado procesos de reducir términos, operar monomios semejantes y trasponer términos tras haber obtenido las ecuaciones que se piden en el enunciado.

- Tareas auxiliares generales: Fórmula del perímetro del triángulo y el rectángulo y realización de operaciones aritméticas al simplificar hasta obtener las soluciones de las incógnitas.

Problema 5:

Campo de problemas según dificultad: este ejercicio pertenece al campo de problemas de operador multiplicativo (O2).

Técnicas: Se traduce el problema a lenguaje algebraico y se simplifica la expresión algebraica obteniendo una ecuación de primer grado que tras la simplificación se debe resolver para obtener las soluciones pedidas.

Tecnologías: Las tecnologías que justifican las técnicas son: el álgebra para la traducción a lenguaje algebraico previamente a la solución del problema, para la simplificación de las expresiones algebraicas agrupamos en términos semejantes teniendo en cuenta el orden de las operaciones y la resolución de las ecuaciones de primer grado se justifican a partir de las siguientes definiciones: "Al sumar, restar, multiplicar y dividir por lo mismo a ambos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente" y "Dos ecuaciones equivalentes poseen la misma solución".

Tareas:

- Tareas principales: Traducir correctamente el enunciado obteniendo la ecuación correcta.
- Tareas auxiliares específicas: Tras haber planteado la ecuación, procesos de reducir términos, operar monomios semejantes y trasponer términos.
- Tareas auxiliares generales: Realización de operaciones aritméticas al simplificar hasta obtener la solución de la incógnita.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En este apartado vamos a señalar las diferentes respuestas a cada uno de los apartados de la prueba escrita, así como los posibles errores que pueden cometer los alumnos a la hora de solucionarlos. Es importante destacar que, a pesar de que en las resoluciones a los ejercicios que aparecen en este apartado se ha tomado en todo momento la incógnita como x, se contará como bien con cualquiera de las letras que los alumnos utilicen para nombrar a las incógnitas ya que en ningún momento se especifica que letra usar. Dentro de los errores no incluimos aquellos relacionados con las operaciones o con los pasos seguidos en las resoluciones de las ecuaciones.

Problema 1:

<u>Resolución:</u>

Se pretende traducir a lenguaje algebraico los cuatro enunciados que se exponen en el ejercicio, para ello los alumnos deben llamar con una letra (la cual no tiene por qué ser x) a la incógnita o valor que se desconoce.

a) Se pide la edad de Pedro y de Juan alegando que Pedro es dos años mayor que Juan. Este apartado se puede resolver de dos formas distintas:

   Forma 1: Tomando como "x = edad de Juan", entonces como Pedro es dos años mayor, "$x + 2$ = edad de Pedro".

   Forma 2: Tomando como "x = edad de Pedro", entonces como Pedro es dos años mayor que Juan, Juan es dos años menor que Pedro, "$x - 2$ = edad de Juan".

b) La suma de tres números consecutivos se puede tomar como un número y los dos siguientes: $x + (x + 1) + (x + 2)$, o como un número y los dos anteriores: $(x - 2) + (x - 1) + x$
c) La diferencia entre un número y el triple de su doble: $x + 3 \cdot 2x$
d) Número de caramelos de Pedro y Juan, tomamos como "x =número de caramelos de Pedro", Juan tiene el doble de caramelos que Pedro más dos "$2x + 2$ = número de caramelos de Juan".

<u>Errores:</u>

Los principales errores que los alumnos pueden cometer a la hora de resolver este problema son mayoritariamente errores de comprensión del enunciado.

- En este caso, los alumnos podrían tomar la incógnita de forma incorrecta y decir por ejemplo que si "x = edad de Pedro", entonces "$x + 2$ = edad de Juan". De este modo no se cumple que Pedro sea dos años mayor que Juan.

- Este enunciado habla de la suma de tres números consecutivos, por lo que los alumnos podrían no ser capaces de deducir que el número siguiente a un número “x” es “$x + 1$”. Así pues, los alumnos podrían tomar como suma de tres números consecutivos $x + 2x + 3x$ deduciendo de forma errónea que, al aumentar progresivamente el coeficiente en cada término, estamos representando así los números consecutivos.
- En esta ocasión se podría hallar dicha diferencia al revés, es decir, restar al triple del doble de un número, dicho número y no al revés. Además, la parte del enunciado que dice “el triple de su doble” podría causar problemas y que los alumnos no supieran traducirlo a lenguaje algebraico.
- En esta ocasión, los alumnos podrían cometer el mismo error que en el apartado a), tomando como “$x =$ caramelos de Juan” y como “$2x + 2 =$ caramelos de Pedro” y no al revés. Por otro lado, la parte del enunciado “el doble de caramelos más dos” puede ocasionar ciertas dificultades a la hora de traducirlo a lenguaje algebraico.

Problema 2:

Resolución:

El objetivo de este problema es calcular los números que se piden, para ello se toma con cualquier letra (en mi caso la he tomado como “x”) a la incógnita o número que se pide calcular y se transforma a lenguaje algebraico cada uno de los enunciados.

a) Llamando “x” al número pedido, si le quito 5 obtengo 15, por lo que $x - 5 = 15$, resolviendo la ecuación de primer grado obtenida haciendo uso de ecuaciones equivalentes, obtenemos que $x - 5 + 5 = 15 + 5$; $x = 20$.
b) Si sumamos un número “x” más su doble “$2x$” obtenemos $x + 2x = 21$; $3x = 21$; $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$; $x = 7$.
c) El triple de la suma de un número y su anterior es $3 \cdot (x + (x - 1)) = 33$; $3 \cdot (2x - 1) = 33$; $6x - 3 = 33$; $6x - 3 + 3 = 33 + 3$; $6x = 36$; $\frac{6x}{6} = \frac{36}{6}$; $x = 6$

Errores:

Como en el problema anterior, podría existir un error de comprensión del enunciado a la hora de traducir a lenguaje algebraico cada uno de los apartados, además de dificultades para la resolución de cada una de las ecuaciones que obtenemos en cada apartado.

a) Una vez se consigue traducir a lenguaje algebraico, el alumno podría despejar de forma incorrecta la x de esta forma: $x = 15 - 5 = 10$.
b) En el enunciado se habla de "la suma de un número más su doble es 21", lo que podrían interpretar como "$x + x^2 = 21$". Tras obtener $x + 2x = 21$; $3x = 21$ el alumno podría tener dificultades despejando la x realizando la siguiente operación errónea $x = 21 - 3 = 18$.
c) En esta ocasión los errores de traducción del enunciado que pueden cometer es obtener la siguiente ecuación: $3x + (x - 1)$, o no ser capaces de deducir que el número anterior a un número x es $x - 1$. Aquellos que consiguen traducir correctamente el enunciado: $3(x + (x - 1)) = 33$, pueden tener dificultades a la hora de simplificar la ecuación realizando, por ejemplo: $3x + x - 1 = 33$(multiplicar solamente el primero de los términos dentro del paréntesis por 3), o: $3(x^2 - 1) = 33$ (en vez de sumar los términos semejantes y ponerlos como $2x$, multiplicarlos). Cuando llegan a $6x - 3 = 33$, podrían no ser capaces de despejar correctamente la x cometiendo errores como $6x = 33 - 3$ o $x = 36 - 6$.

Por otro lado, los alumnos podrían resolver el ejercicio por tanteo, facilitando las soluciones correctas de este sin la necesidad de resolverlo mediante ecuaciones de primer grado tal y como se especifica en el enunciado, por lo tanto, también se contaría como error.

Problema 3:

<u>Resolución:</u>

Se quiere averiguar la edad de Miriam actualmente por lo que se toma "$x =$ edad de Miriam en la actualidad". A continuación, se trata de pasar a lenguaje algebraico el enunciado, en el cual se dice que dentro de doce años (es decir, cuando tenga $x + 12$ años), Miriam tendrá el triple de años de los que tenía hace 4 años (es decir, $3 \cdot (x - 4)$), por lo que la ecuación que obtenemos es $x + 12 = 3 \cdot (x - 4)$, para resolver la ecuación, en primer lugar, trataremos de simplificarla haciendo uso del orden de las operaciones $x + 12 = 3 \cdot (x - 4)$; $x + 12 = 3x - 12$, posteriormente, se procederá a realizar operaciones iguales a ambos lados de la igualdad haciendo uso de las ecuaciones equivalentes $x+12+12=3x-12+12;\ x+24=3x\ ;\ x-x+24=3x-x;\ 24=2x;\ \frac{24}{2}=\frac{2x}{2}$, por lo tanto $x=12$ años tiene Miriam actualmente.

Errores:

Se trata de un problema de edades que puede ocasionar múltiples errores en la comprensión del enunciado y la traducción de este a forma algebraica. En primer lugar el alumno podría no ser capaz de tomar la incógnita como los años actuales de Miriam, o no saber poner "el triple de años de los que tenía hace 4 años" de forma algebraica, ya que podrían no percatarse de que habla de la edad actual menos 4. Una vez han logrado llegar a la ecuación $x+12=3(x-4)$, entrarían en juego los posibles errores de simplificación de la ecuación y de resolución de esta, multiplicando el 3 del segundo miembro de la igualdad solo por uno de los dos términos que componen el interior del paréntesis, o despejando las "x" de forma incorrecta como por ejemplo realizando lo siguiente: $12-12=3x-x;\ \ 0=2x,$ o realizando: $12-12=3x+x;\ 0=4x$ o $12+12=3x+x;\ 24=4x$ entre otros.

Por otro lado, los alumnos podrían resolver el problema por tanteo, facilitando las soluciones correctas de este sin la necesidad de resolverlo mediante ecuaciones de primer grado tal y como se especifica en el enunciado, por lo tanto, también se contaría como error.

Problema 4:

Resolución:

Se trata de un problema en el que se debe tener claros ciertos conceptos geométricos como son la definición de perímetro, el perímetro de un triángulo, el perímetro de un rectángulo, definición de triángulo equilátero y de triángulo isósceles.

a) Se pide calcular cuánto mide cada lado de un triángulo equilátero (donde los tres lados miden lo mismo por definición), por lo tanto, llamaremos "x= medida de cada uno de los lados", y como un triángulo tiene tres lados, y el perímetro de este es la suma de sus lados se tiene que $x+x+x=9;\ 3x=9;\ \frac{3x}{3}=\frac{9}{3};\ x=3$ unidades mide cada lado.
b) Se pide calcular tanto el perímetro del triángulo, como el de la figura mostrada. Para ello se dice que el perímetro del rectángulo mide $14\ cm$, y que la base de este mide

$3\ cm$ más que la altura. A partir de estos datos podemos realizar el problema de dos formas diferentes:

Forma 1: Llamando "$x =$ altura del rectángulo", por lo que "$x + 3 =$ base del rectángulo" y "$x + 1 =$ medida de cada uno de los dos lados iguales del triángulo isósceles".

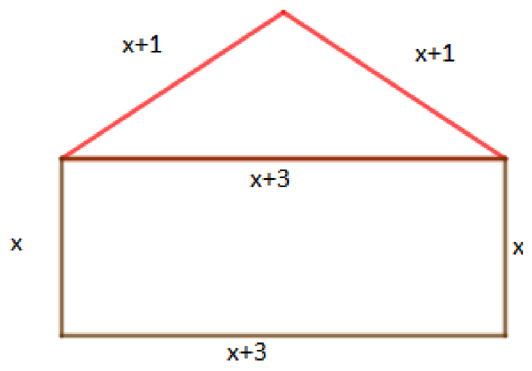

Figura 21. Imagen figura problema 4 con medidas.

El perímetro del rectángulo será: $2 \cdot (x + 3) + 2x = 14;\ 2x + 6 + 2x = 14$, tratamos de simplificar dicha ecuación agrupando términos semejantes, $4x + 6 = 14$ y resolvemos la ecuación de primer grado una vez simplificada $4x + 6 - 6 = 14 - 6;\ 4x = 8;\ \frac{4x}{4} = \frac{8}{4};\ x = 2$. Finalmente calculamos las medidas de cada uno de los lados y los perímetros pedidos:

Altura del rectángulo: $x = 2\ cm$

Base del rectángulo: $x + 3 = 5\ cm$

Cada uno de los lados iguales del triángulo equilátero: $x + 1 = 3\ cm$

Perímetro triángulo: $2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11\ cm$

Perímetro figura: $3 + 3 + 5 + 2 + 2 = 15\ cm$

Forma 2: Llamando "$x =$ base del rectángulo", por lo que "$x - 3 =$ altura del rectángulo" y "$x - 3 + 1\ =\ x - 2 =$ medida de cada uno de los dos lados iguales del triángulo isósceles".

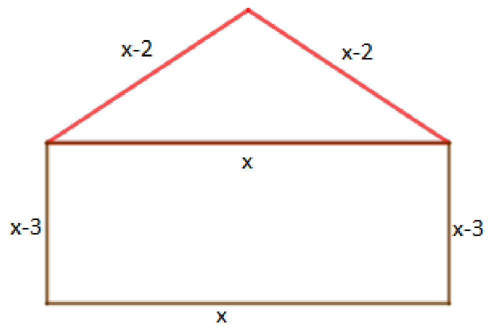

Figura 22. Imagen de la figura del problema 4 con otras medidas.

El perímetro del rectángulo será: $2 \cdot (x - 3) + 2x = 14;\ 2x - 6 + 2x = 14$, tratamos de simplificar dicha ecuación agrupando términos semejantes, $4x - 6 = 14$ y resolvemos la ecuación de primer grado una vez simplificada $4x - 6 + 6 = 14 + 6;\ 4x = 20;\ \frac{4x}{4} = \frac{20}{4};\ x = 5.$ Finalmente calculamos las medidas de cada uno de los lados y los perímetros pedidos:

Altura del rectángulo: $x - 3 = 2\ cm$

Base del rectángulo: $x = 5\ cm$

Cada uno de los lados iguales del triángulo equilátero: $x - 2 = 3\ cm$

Perímetro triángulo: $2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11\ cm$

Perímetro figura: $3 + 3 + 5 + 2 + 2 = 15\ cm$

<u>Errores:</u>

En este problema además de los errores nombrados en el resto de apartados, podrían entrar errores geométricos como el no saber cuál es el perímetro de un triángulo o un rectángulo (o la definición de perímetro como tal, pues en el apartado b se pide hallar el perímetro de la figura).

a) Se piden las medidas de los lados de un triángulo equilátero, por lo que los alumnos deberán saber la definición de triángulo equilátero y ser capaces de deducir que en estos, las medidas de sus lados son iguales. Si no disponen de esta información, los alumnos podrían tomar “$x =$ medida de uno de los lados”, “$y =$ medida de otro de los lados” y “$z =$ medida del último de los lados” (recordemos que el nombre que le dan a cada incógnita, es decir, la letra que utilizan, no es relevante), por lo que llegarían a la siguiente ecuación $x + y + z = 9$ la cual no podrían resolver. Si disponen de esa información de forma correcta pero sin embargo no saben cuál es la fórmula del perímetro de un triángulo, tampoco podrían llegar a la traducción algebraica correcta. Tras traducir bien el enunciado $3x = 9$, podrían tener dificultades a la hora de despejar la incógnita realizando por ejemplo: $x = 9 - 3$. Otro error que los alumnos podrían cometer, al finalizar el ejercicio, una vez han hallado que el valor de $x = 3$es decir que esto son centímetros, puesto que esto no se especifica en el problema, por lo que deberían tomar que son 3 unidades.

b) En este apartado, el primer error puede venir por una falta de comprensión del problema, puesto que el alumno podría tomar como "$x =$ base del rectángulo", "$x + 3 =$ altura del rectángulo" y "$x + 4 =$ lado del triángulo". Otro error, suponiendo que se han definido las incógnitas de forma correcta, es no saber la fórmula del perímetro de un rectángulo y por lo tanto no ser capaces de traducir el enunciado a forma algebraica. Además los alumnos podrían no saber las características de los triángulos isósceles. Una vez se obtiene la ecuación $2(x + 3) + 2x = 14$, se podría simplificar de forma incorrecta multiplicando por 2 solamente uno de los dos términos que forman el paréntesis o no ser capaces de agrupar los términos semejantes (los términos independientes por un lado y los términos de mayor grado por otro). Tras llegar $4x = 8$, podrían despejar mal la x realizando $x = 8 - 4$. Finalmente, una vez se han obtenido las medidas de la base y altura del rectángulo, así como la de cada uno de los lados iguales del triángulo, los alumnos podrían acabar ahí el problema y no hallar lo que verdaderamente se les pide que es tanto el perímetro del triángulo, como el de la figura propuesta.

Por otro lado, los alumnos podrían resolver ambos apartados por tanteo, facilitando las soluciones correctas de estos sin la necesidad de resolverlos mediante ecuaciones de primer grado tal y como se especifica en el enunciado, por lo tanto, también se contaría como error.

Problema 5:

Resolución:

Se quiere averiguar el número de rotuladores y cuadernos que se han comprado, según tomemos x (o la letra que utilicemos para representar la incógnita) como el número de rotuladores o el número de cuadernos, podremos resolver el problema de dos formas distintas para obtener el mismo resultado.

Forma 1: Llamamos "$x =$ número de cuadernos que Alba se lleva", como según el enunciado se lleva el triple de rotuladores, "$3x =$ número de rotuladores que compra". Además, Alba se ha gastado 27€ en total. Como un rotulador cuesta 2€, $3x$ rotuladores le habrán costado $2 \cdot 3x$€, y como un cuaderno cuesta $3€, x$ cuadernos le habrán costado $3 \cdot x$€. Así pues, tendremos que $3 \cdot x + 2 \cdot 3x = 27$ y haciendo uso de la simplificación de ecuaciones, mediante la jerarquía de las operaciones y la agrupación de términos semejantes, tendremos que $3x + 6x = 27;\ 9x = 27$, y resolviendo la ecuación obtenemos que $\frac{9x}{9} = \frac{27}{9};\ x = 3$.

Solución: Compra $x = 3$cuadernos y $3x = 9$ rotuladores.

Forma 2: Llamamos "$x =$ número de rotuladores que Alba se lleva", como según el enunciado se lleva el triple de rotuladores que de cuadernos, "$\frac{x}{3}$ número de cuadernos que compra". Además, Alba se ha gastado 27€ en total. Como un rotulador cuesta 2€, x rotuladores le habrán costado $2 \cdot x$€, y como un cuaderno cuesta $3€, x3$ cuadernos le habrán costado $3 \cdot \frac{x}{3}$€. Así pues, tendremos que $2 \cdot x + 3 \cdot \frac{x}{3} = 27$ y haciendo uso de la simplificación de ecuaciones, mediante la jerarquía de las operaciones y la agrupación de términos semejantes, tendremos que $2x + x = 27;\ 3x = 27$, y resolviendo la ecuación obtenemos que $3\frac{x}{3} = \frac{27}{3};\ x = 9$.

Solución: Compra $\frac{x}{3} = 3$ cuadernos y $x = 9$ rotuladores.

<u>Errores:</u>

Este problema puede ocasionar errores de comprensión del enunciado, el alumno puede no ser capaz de traducir dicho enunciado a lenguaje algebraico. Algunas de las dificultades que puede ocasionar el enunciado son:

- Tomar "$x =$ precio total de los rotuladores" o "$x =$ precio total de los cuadernos".
- Tomando "$x =$ número de cuadernos que lleva", poner que el triple de rotuladores es $x + 3$ y no $3x$.
- Tomar "$x =$ número de rotuladores" y poner que "$3x =$ número de cuadernos".

- No ser capaces de ver que el precio total de rotuladores se calcula multiplicando lo que cuesta un rotulador por el número de rotuladores que compra (lo mismo con el precio de los cuadernos).

Una vez se ha logrado obtener $3x + 6x = 27$, podrían darse errores a la hora de simplificar la ecuación y posteriormente, tras obtener $9x = 27$, a la hora de despejar la incógnita para hallar su resultado, por ejemplo, realizando $x = 27 - 9$. Finalmente, tras dar el resultado, el alumno podría decir erróneamente que lo que obtenemos son euros y no el número de rotuladores y cuadernos.

Por otro lado, los alumnos podrían resolver el problema por tanteo, facilitando las soluciones correctas de este sin la necesidad de resolverlo mediante ecuaciones de primer grado tal y como se especifica en el enunciado, por lo tanto, también se contaría como error.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

El examen tendrá una puntuación máxima de 10 y una puntuación mínima de 0, además, para superar dicha prueba, el alumno deberá obtener una puntuación mayor o igual que 5.

Para obtener la puntuación de la prueba escrita el modelo que vamos a utilizar es el de penalización de errores también llamado "modelo de tercios" diseñado por Gairín, Muñoz y Oller (2012) que se basa en penalizar los errores quitando por tareas auxiliares generales hasta $\frac{1}{3}$de la puntuación y seguir con la corrección; los errores cometidos en el conjunto de las tareas auxiliares generales y específicas se penalizará con hasta $\frac{2}{3}$ de la puntuación total, el resto de la puntuación se reserva para las tareas principales, además se pueden penalizar dichos errores de esta última categoría con el total de la puntuación (Gairín, Muñoz $ Oller 2012).

Los aspectos a evaluar sobre este objeto matemático son:

(4) Traducción a lenguaje algebraico.
(5) Simplificación de la ecuación de primer grado.
(6) Resolución de la ecuación de primer grado.
(7) Interpretación correcta de lo pedido en el enunciado (entra dentro de las tareas auxiliares generales).

La prueba escrita consta de 5 ejercicios, y se podrá obtener una puntuación máxima de 2 puntos por cada ejercicio.

A continuación, pasaremos a comentar los diferentes aspectos que se penalizarán en cada apartado.

Problema 1:

Se trata de un problema de traducción algebraica que consta de 4 apartados (donde cuentan 0.5 puntos cada apartado), como en cada uno de estos solo tenemos tareas principales se penalizará de la siguiente forma:

1. Traducción a lenguaje algebraico (saber traducir correctamente cada uno de los 4 enunciados propuestos a lenguaje algebraico). Si dicha traducción no es correcta se penaliza con el total de la puntuación de cada apartado (es decir, cada apartado que se haga mal se puntuará con 0 puntos restando el 100% de la puntuación).

Problema 2:

Este ejercicio consta de 3 apartados, los cuales valen 0.5 y 0.5 los dos primeros, y 1 punto el último de ellos. Los penalizaremos de la siguiente manera:

1. Los fallos cometidos en las tareas auxiliares generales se penalizarán con hasta un 20% de la nota, mientras que los fallos cometidos en las tareas auxiliares específicas con hasta un 40% de la puntuación.
2. Se podrá penalizar con el 100% de la puntuación de cada apartado por los fallos cometidos en las tareas principales.

Problema 3:

Se trata de un problema con un único apartado por lo que contará 2 puntos en su totalidad. Se tendrá en cuenta:

1. Se penalizarán los fallos en las tareas auxiliares generales con hasta el 20% de la nota, mientras que los fallos cometidos en las tareas auxiliares específicas con hasta el 40% de la puntuación.
2. Se penalizará con hasta el 100% de la puntuación por los fallos cometidos en las tareas principales.

Problema 4:

Este problema consta de dos apartados, el primero puntúa un máximo de 0.5 puntos, mientras que el segundo 1.5 puntos. En esta ocasión los aspectos a tener en cuenta para puntuar son:

1. Los fallos cometidos en las tareas auxiliares generales se penalizarán con hasta el 20% de la nota, mientras que los fallos cometidos en las tareas auxiliares específicas con hasta un 40% de la puntuación.
2. Los fallos cometidos en las tareas principales de cada apartado se podrán penalizar con hasta el 100% de la puntuación.

Problema 5:

Para obtener la puntuación de este problema tendremos en cuenta:

1. Los fallos en las tareas auxiliares generales se podrán penalizar con hasta un 20% de la nota, mientras que penalizaremos los fallos cometidos en las tareas auxiliares específicas con hasta el 40% de la puntuación.
2. Se penalizará con hasta el 100% de la puntuación por los fallos cometidos en las tareas principales.

J) Sobre la bibliografía y página web

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Colera, J. & Gaztelu, I. (2009). Álgebra. *Educación Secundaria Matemáticas.* Madrid, España: Anaya.

Esteban, R. Matemáticas 1º de ESO LOMCE. Tema VII: Iniciación al álgebra. [Página web]. Recuperado de https://www.educa2.madrid.org/web/educamadrid/principal/files/b91ef419-b93b-4d86-8f75-3865142fe57a/tema7de1esoLOMCE.pdf?t=1435654520199

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas.* En Investigación en Educación Matemática XVI, pp. 261-274. Jaén: SEIEM.

Godino, J.D., Aké, L.P., Gonzato, M. & Wilhelmi, MR (2014). *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar*. Implicación para la formación del profesorado de primaria. *Enseñanza de Las Ciencias, 32* (1), 199-219.

Mathematics Assessment Project Classroom Challenges. (2015). Interpreting Algebraic Expressions. [Página web]. Recuperado de https://www.map.mathshell.org/

Molina, M. (2015). *Concepciones del álgebra escolar.* Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, *por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*

ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Rochera, M.J., Colomina, R. & Barberá, E. (2001). *Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas.* Investigación en la Escuela, 45, 33-44.

Ruiz-Muñoz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 4 (2), 106, https://doi.org/10.17583/redimat.2015.1386

Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M.M. & Hernández, J. (1999) *Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Inicialización al álgebra. 23*. Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A.

Universidad de Cambridge (1997-2020). NRICH. [Página web]. Recuperado de: https://nrich.maths.org/